Mathematik 2004

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Prüfungsdauer: 240 Minuten (keine Pause)

Prüfungsbogen: Der Prüfungsbogen umfasst 4 Blätter.
Es sind 10 Aufgaben zu lösen. Die zu erreichende Punktzahl pro Aufgabe folgt hinter der Aufgabennummer. Die maximal mögliche Punktzahl beträgt 43 Punkte.

Hilfsmittel: CAS-Taschenrechner, Formelsammlung (ohne gelöste Beispiele), Schablonen

---

Weitere Hinweise

- Bei allen Aufgaben sind die Überlegungen und Schritte, die zur Lösung führen, darzustellen. Insbesondere betrifft dies auch die über die gewöhnliche Arithmetik hinausgehende Verwendung des CAS-Rechners.
- Folgende Symbole definieren den CAS-Rechner-Einsatz:
  - ✍ Die Aufgabe ist von Hand auszuführen; Solve-Tasten oder sonstige Lösungstasten resp. Programme dürfen nur als persönliches Kontrollinstrument eingesetzt werden.
  - 💻 Die Aufgabe kann von Hand gelöst werden; Solve-Tasten oder sonstige Lösungstasten resp. Programme dürfen eingesetzt werden.
- Lösungen sind, wo nichts anderes gesagt wird, exakt anzugeben (Wurzeln oder π-Vielfache stehen lassen).
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden (Namen nicht vergessen!).
- Leere Lösungsblätter, von nicht gelösten Aufgaben, sind auch abzugeben.
- Ordnen Sie am Schluss der Prüfung die Aufgaben nach den Nummern ein.
- Sie können mit Bleistift schreiben.

Erreichte Punkte [ ] Prüfungsnote [ ]

Visum Examinator: ______________________ Visum Experte: ______________________

1✍ a) Bestimmen Sie die Definitions- und die Lösungsmenge ($x \in R$):

$\frac{x-2}{|7-x|} \leq \frac{1}{3}$ ☞ Die Aufgabe ist mit Hilfe einer Fallunterscheidung zu lösen! (3P)

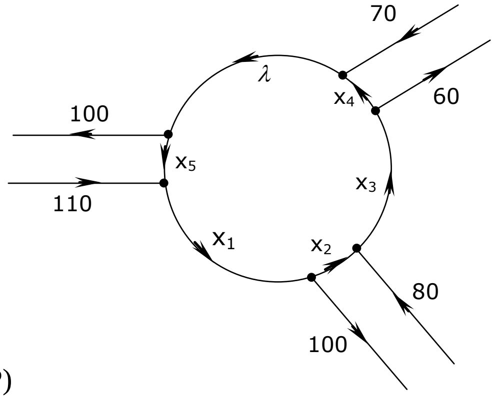
b) Lösen Sie die Gleichung mit Hilfe einer Fallunterscheidung für den Parameter $a \in R$:

$2ax - 24 = (x-3)(a+4)$ (2P)

c) Bestimmen Sie die Definitions- und die Lösungsmenge ($x \in R$):

$\log_{\sqrt{2}}(x-2) = -3 + \log_2(x^2 - 4)$ (2P)

2💻 An einem Kreisverkehr enden die Strassen mit den angegebenen Verkehrsflüssen, die in der Hauptverkehrszeit am Mittag festgestellt wurden. Die Pfeile bezeichnen die erlaubten Fahrtrichtungen. Die angegebenen Zahlen und die Grössen λ, x_1, x_2...,x_5 bezeichnen Verkehrsflüsse in Anzahl Autos pro Stunde, die durchfahren.



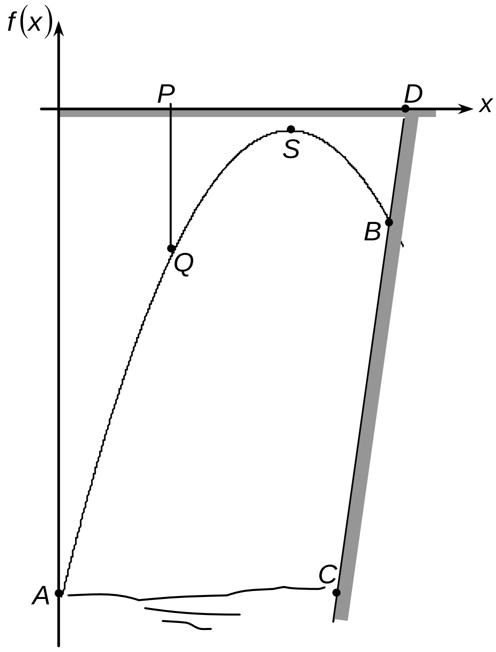
a) Berechnen Sie sämtliche Verkehrsflüsse x_i in den einzelnen Kreisel-Abschnitten in Abhängigkeit des Parameters λ. (2P)

b) Wie gross darf λ höchstens sein, wenn der maximale Verkehrsfluss 130 Autos/h nicht übersteigen darf? (1P)

3💻 Zwischen dem Punkt A und der durch die Gerade CD gegebenen Steilwand soll ein parabelförmiger Brückenbogen mit dem Scheitel S gebaut werden. Die Fahrbahn befindet sich auf der x-Achse. Für die folgenden vier Punkte sind gemäss Zeichnung die nachfolgend gegebenen Koordinaten (in Meter) bekannt:

A(0 | -42), S(100 | -2), C(143 | -42), D(150 | 0)

(Lösungen auf 2 signifikante Stellen nach dem Komma runden)



a) Bestimmen Sie eine Gleichung für den Parabelbogen in der Scheitelform. (1.5P)

b) Berechnen Sie die Gleichung der Geraden durch C und D. (1P)

c) Berechnen Sie die Koordinaten des Bogenendpunktes B. (1P)

d) Zwischen dem Punkt P(35 | 0) auf der Fahrbahn und Q auf dem Parabelbogen soll eine vertikale Strebe eingebaut werden. Berechnen Sie den Abstand zwischen P und Q. (0.5P)

4✍ Gegeben ist die Geradenschar $f_q(x) = 2x + q$ mit dem Parameter $q \in R$.

a) Berechnen Sie die Funktionsgleichung der Geraden $g: x \to g(x)$, deren Graph durch den Punkt Q(1 | 5) verläuft und senkrecht zur Schar steht. (1.5P)

b) Gegeben ist eine weitere Gerade mit der Funktionsgleichung $h_m(x) = mx + 3, \quad m \in R$

Wie gross muss m in Abhängigkeit von q sein, damit sich die Graphen f_q und h_m auf der x-Achse schneiden? (1.5P)

5✍ Statistische Lebensdauer eines Gerätes.

Aus der Statistik sei bekannt, dass der prozentuale Anteil $R(t)$ an funktionierenden Geräten einer Massensendung nach der Zeit t durch folgende Gesetzmässigkeit beschrieben werden kann:

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{T}\right)^b}$$

Dabei sind b, T geräteabhängige Parameter.

Diese Information ist sehr wichtig für die Planung von Service- und Reparaturarbeiten sowie für die Bereithaltung von Ersatzteilen.

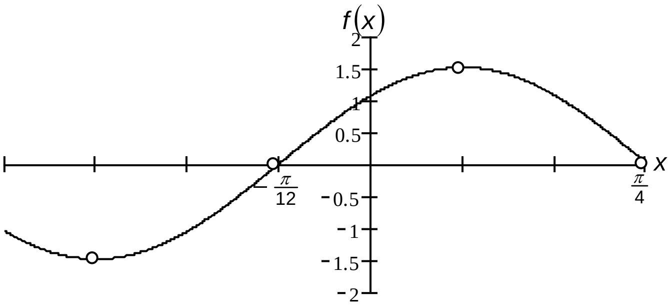
Eine Firma gewährt für ihr Gerät eine Garantiezeit von 3 Jahren. Es ist bekannt, dass $b = 2.3$ beträgt.

Wie gross muss die charakteristische Lebensdauer T mindestens sein, damit während der Garantiezeit voraussichtlich höchstens 3% der Geräte ausfallen?

(Hinweis: Leiten Sie vorab die Formel für T her.) (3P)

(Lösung auf 2 signifikante Stellen nach dem Komma runden)

6✍ a) Bestimmen Sie eine zum Graphen passende Funktionsgleichung. (1.5P)



b) Beweisen Sie, dass für alle x∈R gilt: $\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos(x) - \sin(x)$ (2P)

c) Gesucht sind alle Lösungen (2 signifikante Stellen nach dem Komma) für x∈R:

$3\cos^2(x) - 5\sin(x) = 1$ (2.5P)

7✍ Auf einer „Schlankheitsfarm" unterziehen sich „Übergewichtige" einer Nulldiät. Damit der tägliche Vitaminbedarf gedeckt wird, erhalten sie zwei Vitaminpräparate V_1 und V_2. Der Mindestbedarf an Vitamin A, C und K je Tag, der Vitamingehalt und die Kosten, die sich auf eine Person beziehen, sind der Tabelle zu entnehmen.

Vitamin	Gehalt der Präparate je g in internationalen Einheiten IE		Mindestbedarf in IE
	V_1	V_2	
A	0.10	0.15	1.50
C	20.00	10.00	150.00
K	1.00	4.00	20.00
Kosten je g	0.10 Fr.	0.20 Fr.	Minimal

Welche Mengen müssen pro Tag verabreicht werden, damit der Mindestbedarf gedeckt wird und die Kosten Minimal sind? Wie hoch sind die täglichen Kosten? (5P)

Auszuführende Arbeiten auf dem Weg zur Lösung:

- Definieren Sie die beiden Variablen x und y.
- Bestimmen Sie die Bedingungen und die Zielfunktion $z = f(x, y)$ für das Planungspolygon.
- Zeichnen Sie ein möglichst grosses Planungspolygon mit der Parallelenschar der Zielfunktion.

8 Eine Ebene geht durch die drei Punkte A(2 | 4 | 5), B(0 | 7 | 7) und D(-1 | 7 | 11).

a) Geben Sie die Parametergleichung der Ebene an und berechnen Sie damit den Durchstosspunkt E mit der Geraden durch den Ursprung und dem Punkt P(-2 | 15 | 20). (2P)

b) Begründen Sie, wieso E innerhalb des Parallelogramms ABCD liegt. (1P)

---

9 Wir kennen eine Ebene E und zwei Geraden g und h:

$$E: x - y + 2z - 3 = 0\,; \qquad g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}; \qquad h: \vec{r} = \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass $g \subset E$ ist. (1.5P)

b) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung einer zweiten Ebene G die folgende Bedingungen erfüllt: $G \perp xy-Ebene \quad \wedge \quad g \subset G$ (1.5P)

c) Die beiden Geraden g, h schneiden sich. Berechnen Sie den Schnittwinkel φ (2 signifikante Stellen nach dem Komma) und den Schnittpunkt (Hinweis: er ist ganzzahlig). (2P)

---

10 Bei Projektierungsarbeiten für eine neue Hochstrasse, die über zwei Eisenbahnlinien und in zwei bestehende Strassen führt, müssen die Entfernungen $\overline{PB}, \overline{PC}$ und $\overline{BC}$ ermittelt werden. Dazu wird auf der Achse der Bahnhofstrasse von P aus in 400 m Entfernung der Punkt Q festgelegt und die Winkel zwischen PQ und den Verbindungslinien nach B und C gemessen:

$\delta_1 = 33.5°$

$\delta_2 = 46.3°$

$\varepsilon_1 = 109.2°$

$\varepsilon_2 = 114.0°$

Berechnen Sie die Distanzen $\overline{PB}, \overline{PC}, \overline{BC}$! (4P)

(Lösungen auf 2 signifikante Stellen nach dem Komma runden!)